# ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ВАГОМОЇ НИТКИ, ЯКА ПІДВІШЕНА ЗА ОДИН КІНЕЦЬ, ПІД ДІЄЮ ВІТРОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

**Обухов А. М., Паламарчук В. О.**

Поставлена та розв'язана задача визначення поперечного переміщення довільного перетину вагомою нитки, підвішеної за один кінець, яка знаходиться під дією вітрового навантаження. Операційним методом задачу зведено до розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння. Проведено дослідження отриманих розв'язків крайової задачі для звичайного диференціального рівняння. При цьому, розв'язки отримані у вигляді функціональних рядів за системою функцій Бесселя, що є рівномірно збіжними на інтервалі $x \in (0; l)$. Отримана формула, яка дозволяє розрахувати поперечні переміщення довільного перетину нитки, що знаходиться під дією вітрового навантаження, у будь-який момент часу.

Поставлена и решена задача определения поперечного перемещения произвольного сечения весомой нити, подвешенной за один конец и находящейся под действием ветровой нагрузки. Операционным методом задача сведена к решению краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. Проведено исследование полученных решений краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. При этом, решения получены в виде функциональных рядов по системе функций Бесселя, равномерно сходящихся на интервале $x \in (0; l)$. Получена формула, позволяющая рассчитать поперечные перемещения произвольного сечения нити, находящейся под действием ветровой нагрузки, в любой момент времени.

The problem of determining the cross movement of any section of a heavy cord hanged at one end under the influence of wind loads is defined and solved. With the help of the operational method the problem is converted to the solution of a boundary value problem for an ordinary differential equation. The study of the obtained results of a boundary value problem for an ordinary differential equation is represented. In doing so, the solutions were obtained in the form of series of functions according to Bessel's system of functions, which are uniformly convergent in the interval. A formula that allows to calculate the cross movement of any section of a cord under the influence of wind loads at any time is obtained.

Обухов А. М. — канд. техн. наук, доц. ДДМА
vm@dgma.donetsk.ua

Паламарчук В. О. — канд. техн. наук, доц. ДДМА

ДДМА – Донбаська державна машинобудівна академія, м. Краматорськ.

УДК 531.396, 534.011

**Обухов А. М., Паламарчук В. О.**

# ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ВАГОМОЇ НИТКИ, ЯКА ПІДВІШЕНА ЗА ОДИН КІНЕЦЬ, ПІД ДІЄЮ ВІТРОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Дана робота продовжує дослідження [1,2] механічніх колівань в умовах складних навантажень.

Нехай на вагому нитку, підвішену за верхній кінець $x = l$ діє неперервно розподілена сила (вітрове навантаження), $F(x,t)$розрахована на одиницю довжини. Тоді рівняння вимушених поперечних коливань нитки можна записати у вигляді[3]

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = g\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{F(x,t)}{\rho} \tag{1}$$

де $U(x,t)$ – поперечне переміщення нитки в перерізах;

ρ – лінійна густина матеріалу нитки;

g – прискорення вільного падіння.

Приймемо до уваги вираз вітрового навантаження у вигляді [4]

$$F(x,t) = k\left(V_0 - \frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 \tag{2}$$

де $V_0$ – швидкість вітру;

$\frac{\partial U}{\partial t}$ – швидкість переміщення нитки в перерізі x;

k – коефіцієнт пропорційності.

Враховуючи,що $\frac{\partial U}{\partial t} << V_0$ у виразі (2) знехтуємо $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2$ и приймемо у вигляді

$$F(x,t) = k\left(V_0^2 - 2V_0\frac{\partial U}{\partial t}\right) \tag{3}$$

Враховуючи (3), диференціальне рівняння(1) перепишемо у вигляді

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2\alpha\frac{\partial U}{\partial t} = g\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \alpha V_0, \tag{4}$$

де $\alpha = \frac{kV_0}{\rho}$ – коефіцієнт, що має розмірність $[c^{-1}]$.

Досліджуємо процес поведінки нитки, що знаходиться під дією вітрового завантаження, у разі, коли в початковий момент часу нитка займала положення статичної рівноваги, тобто

$$U(x,0) = \frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

Математичну модель процесу, що вивчається, можна представити у вигляді диференціального рівняння (4), розв'язок котрого задовольняє

- Граничним умовам

$$U(x,t)\big|_{x=l} = 0; \quad U(x,t)\big|_{x=0} < \infty. \tag{5}$$

- Початковим умовам

$$U(x,0)=\frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 \tag{6}$$

Завдання розв’яжемо операційним методом. Застосуємо перетворення Лапласа до диференциального рівняння (4) по змінній t і враховуючи початкові умови (6), отримаємо краєву задачу для звичайного диференціального рівняння

$$\left(p^2+2\alpha p\right)\overline{U}(x,p)=g\frac{d}{dx}\left(x\frac{d\overline{U}}{dx}\right)+\frac{\alpha}{p}V_0 \tag{7}$$

розв’язок якого задовольняє граничним умовам

$$\overline{U}(x,t)\big|_{x=l}=0;\quad \overline{U}(x,t)\big|_{x=0}<\infty. \tag{8}$$

Тут $\overline{U}(x,p)=\int\limits_0^\infty U(x,t)e^{-pt}dt.$

Будемо шукати загальний розв’язок рівняння (7) у вигляді:

$$\overline{U}(x,p)=\overline{U}_0(p)+\overline{V}(x,p) \tag{9}$$

Тут

$$\overline{U}_0(p)=\frac{\alpha V_0}{p^2(p+2\alpha)}, \tag{10}$$

А функція $\overline{V}(x,p)$ є розв’язком рівняння

$$\left(p^2+2\alpha p\right)\overline{V}(x,p)=g\frac{d}{dx}\left(x\frac{d\overline{V}}{dx}\right), \tag{11}$$

Що задовольняє граничним умовам

$$\overline{V}(x,p)\big|_{x=l}=-\frac{\alpha V_0}{p^2(p+2\alpha)};\quad \overline{V}(x,p)\big|_{x=0}<\infty. \tag{12}$$

Загальний розв’язок рівняння (11) запишемо як

$$\overline{V}(x,p)=C_1I_0\left(2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2+2p\alpha}\sqrt{\frac{x}{l}}\right)+C_2Y_0\left(2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2+2p\alpha}\sqrt{\frac{x}{l}}\right), \tag{13}$$

де $I_0(z), Y_0(z)$ – функції Бесселя уявного аргументу першого роду нульового порядку. Враховуючи, що при $z\to 0$ $Y_0(z)\to\infty$ и граничну умову (12), отримаємо $C_2=0$. Використавши першу граничну умову (12), знайдемо

$$C_1=-\frac{\alpha V_0}{p^2(p+2\alpha)}\cdot\frac{1}{I_0\left(2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2+2p\alpha}\right)} \tag{14}$$

Відповідно до выразів (9),(13) і (14) розв’язок крайової задачі запишемо у вигляді

$$\overline{U}(x,p)=\frac{\alpha V_0}{p^2(p+2\alpha)}\cdot\left(1-\frac{I_0\left(2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2+2p\alpha}\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{I_0\left(2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2+2p\alpha}\right)}\right) \tag{15}$$

Вираз (15) є зображенням шуканого розв’язку. За допомогою зворотнього перетворення Лапласа вираз (15), приведемо до вигляду

$$U(x,t)=\int_{-\infty+is}^{\infty+is}\frac{\alpha V_0}{p^2(p+2\alpha)}\cdot\left(1-\frac{I_0\left(2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2+2p\alpha}\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{I_0\left(2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2+2p\alpha}\right)}\right)\cdot e^{pt}dp \qquad (16)$$

Функція $\overline{U}(x,p)$ аналітична на всій області визначення, крім полюсів, які є коренями рівняння

$$p^2(p+2\alpha)I_0\left(2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2+2p\alpha}\right)=0 \qquad (16')$$

Знайдемо корені рівняння (16’). Очевидно, p=0 – корінь кратності r=2; p=-2α – кратності r=1. Щоб знайти інші корені, достатньо покласти $2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2+2p\alpha}=i\mu$. Знайдемо розвязок рівняння $J_0(\mu)=0$, тут $J_0(z)$ - функція Бесселя першого роду нульового порядку. Відомо, що рівняння . $J_0(\mu)=0$ має зчисленну множину дійсних коренів [5]:

$$\mu_1<\mu_2<....<\mu_k<.....$$

Кореню $\mu_k$ відповідає пара коренів рівняння

$$p^2+2\alpha p+\frac{g}{l}\frac{\mu_k^2}{4}=0 \qquad (17)$$

корені

$$p_{k_{1,2}}=-\alpha\mp i\omega_k, \qquad (18)$$

де

$$\omega_k=\sqrt{\frac{g}{l}\frac{\mu_k^2}{4}-\alpha^2} \quad k=1,2,3... \qquad (19)$$

Розглянемо умову $\mu_k^2>4\alpha^2\frac{l}{g}$. В цьому випадку у системі реалізується коливальний процес.

Використовуючи теорію лишків, інтеграл (16) можна записати у вигляді:

$$U(x,t)=\sum_i \operatorname*{Res}_{p_i}\left(\overline{U}(x,p)e^{pt}\right) \qquad (20)$$

Тут

$$\operatorname*{Res}_{p_i}\left(\overline{U}(x,p)e^{pt}\right)=\lim_{p\to p_i}\frac{d^{r-1}}{dp^{r-1}}\left(\overline{U}(x,p)(p-p_i)^r e^{pt}\right) \qquad (21)$$

де $p_i$ полюс $\overline{U}(x,p)$ кратності r .

Обчислимо значення лишків у відповідних полюсах.

а) p=0. кратність r=2. Згідно з формулою (21) маємо:

$$\operatorname*{Res}_{p=0}\left(\overline{U}(x,p)e^{pt}\right)=\lim_{p\to 0}\frac{d}{dp}\left(\frac{\alpha V_0}{p+2\alpha}\left(1-\frac{I_0\left(2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2+2\alpha p}\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{I_0\left(2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2+2\alpha p}\right)}\right)e^{pt}\right)=\frac{\alpha V_0}{g}l\left(1-\frac{x}{l}\right)\quad(22)$$

б) p=-2$\alpha$

$$\operatorname*{Res}_{p=-2\alpha}\left(\overline{U}(x,p)e^{pt}\right)=\lim_{p\to -2\alpha}\left(\frac{e^{pt}}{p^2}\left(1-\frac{I_0\left(2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2+2\alpha p}\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{I_0\left(2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2+2\alpha p}\right)}\right)\right)=0$$

тому, що $I_0(0)=1$

в) $p_к=-\alpha+i\omega_k \quad k=1,2,3......$

$$\operatorname*{Res}_{p=p_k}\left(\overline{U}(x,p)e^{pt}\right)=\lim_{p\to -\alpha+i\omega_k}\left(\frac{\alpha V_0(p-p_k)}{p^2(p+2\alpha)}e^{pt}-\frac{\alpha V_0}{p^2(p+2\alpha)}\left(\frac{I_0\left(2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2+2\alpha p}\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{I_0\left(2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2+2\alpha p}\right)}(p-p_k)e^{pt}\right)\right)=$$

$$=\frac{\alpha V_0}{1}\lim_{p\to -\alpha+i\omega_k}\left(\frac{I_0\left(2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2+2\alpha p}\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{p^2(p+2\alpha)\frac{d}{dp}I_0\left(2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2+2\alpha p}\right)}e^{pt}\right)\qquad(24)$$

Окремо знайдемо $\frac{d}{dp}I_0\left(2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2+2\alpha p}\right)$ і обчислимо її значення при $p_к=-\alpha+i\omega_k$

$$\frac{d}{dp}I_0\left(2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2+2\alpha p}\right)=I_0'\left(2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2+2\alpha p}\right)\cdot 2\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{p+\alpha}{\sqrt{p^2+2\alpha p}}=$$

$$=I_1\left(2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2+2\alpha p}\right)2\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{p+\alpha}{\sqrt{p^2+2\alpha p}}.$$

Тут $I_1(z)$ – функція Бесселя уявного аргументу першого роду першого порядку, враховуючи, що $I_1(z)=-iJ_1(iz)$, обчислимо

$$\left.\frac{d}{dp}I_0\left(2\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{p^2+2\alpha p}\right)\right|_{p=-\alpha+i\omega_k}=i\cdot 4\frac{l\omega_k}{g\mu_k}J_1(\mu_k)\qquad(25)$$

Тоді выраз (24), з урахувнням (25), після нескладних алгебраїчних перетворень можна привести до вигляду

$$\operatorname*{Res}_{p=-\alpha+i\omega_k}\left(\overline{U}(x,p)e^{pt}\right)=-4\frac{\alpha V_0 l}{g}\frac{\left(\left(\cos\omega_k t+\frac{\alpha}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)-i\left(\frac{\alpha}{\omega_k}\cos\omega_k t-\sin\omega_k t\right)\right)e^{-\alpha t}}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)}J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\quad(26)$$

Враховуючи, що

$$\underset{p=-\alpha+i\omega_k}{\mathrm{Res}}\left(\overline{U}(x,p)e^{pt}\right)+\underset{p=-\alpha-i\omega_k}{\mathrm{Res}}\left(\overline{U}(x,p)e^{pt}\right)=2\,\mathrm{Re}\left(\underset{p=-\alpha+i\omega_k}{\mathrm{Res}}\left(\overline{U}(x,p)e^{pt}\right)\right),$$ знайдемо

$$2\,\mathrm{Re}\left(\underset{p=-\alpha+i\omega_k}{\mathrm{Res}}\left(\overline{U}(x,p)e^{pt}\right)\right)=-8\frac{\alpha V_0 l}{g}\frac{\left(\left(\cos\omega_k t+\frac{\alpha}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\right)e^{-\alpha t}}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)}J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right),\quad k=1,2,3... \tag{27}$$

Звертаючись до рівності (20) і враховуючи значення відповідних обчислень (22), (23) і (27), поперечне переміщення довільного перетину нитки, що знаходиться під дією вітрового навантаження, можна знайти за формулою

$$U(x,t)=\frac{kV_0}{\rho g}\left(\left(1-\frac{x}{l}\right)-8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\cos\omega_k t+\frac{\alpha}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)e^{\alpha t}}{\mu_k J_1(\mu_k)}J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\right) \tag{28}$$

## ВИСНОВКИ

1. Поставлена і розв’язана задача визначення поперечного переміщення довільного перетину вагомої нитки, підвішеної за один кінець, що знаходиться під дією вітрового навантаження.

2. Операційним методом задача зведена до розв’язання краєвої задачі для звичайного диференціального рівняння.

3. Проведено дослідження отриманих розв’язків краєвої задачі для звичайного диференціального рівняння.

4. Отримана формула визначення поперечного переміщення довільного перетину нитки.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

*1. Обухов А.Н. Поперечные перемещения подвешенной нити в случае, когда точка подвеса движется горизонтально по заданному закону [Электронный ресурс] / А.Н.Обухов, В.А.Паламарчук // Научный вестник Донбасской государственной машиностроительной академии [Электронный ресурс]. – Краматорск, 2014. – № 1 (13Е). – С. 65–75. – Режим доступу: http://www.dgma.donetsk.ua/science_public/science_vesnik/%E2%84%961 (13%D0%95)_2014/article/11.pdf*

*2. Обухов А.Н. О поперечных перемещениях нити в среде с силой сопротивления движению, пропорциональной скорости перемещения её произвольного сечения / А.Н.Обухов, В.А.Паламарчук // Вісник Донбаської державної машинобудівної академії [Електронний ресурс]. - Краматорськ, 2015. – № 1 (34). – С. 64–73. – Режим доступу: http://www.dgma.donetsk.ua/science_public/ddma/Herald_1(34)_2015/article/13.pdf*

*3. Джеффрис Г. Методы математической физики. Вып. 3 / Г. Джеффрис, Б. Свирлс. – М.: Мир, 1970. – 344 с.*

*4. Курс теоретической механики / В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин[ и др.] Под общей редакцией К.С. Колесникова. – М.: МГТУ им. Баумана, 2000. – 736 с.*

*5. Араманович И.Г. Уравнения математической физики: монография / И.Г. Араманович, В.И. Левин. – М.: Наука,1969. – 188 с.*

*Стаття надійшла до редакції 11.05.2016 р.*